変化する原点を持つ3母数分布からの区間データに基づく様々の推定値の存在について(統計的決定方式の最適性の研究)

中村, 忠; 李, 採臣

数理解析研究所講究録
第 723 巻 1990 年 58-69

変化する原点を持つ3母数分布からの区間データに基づく様々の推定値の存在について

川崎医科大学　　中村 忠 (Tadasi Nakamura)
岡山大学自然科学研究科　李 採臣 (Chae-Shin Lee　)

1.　はじめに

$\mathcal{R} = (-\infty,\infty)$, $\mathcal{R}_+ = (0,\infty)$, とし，$\mathcal{F} = \{F(\alpha h(x-\lambda)-\beta); (\alpha,\beta,\lambda) \in \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}\}$ 上の確率分布関数族とする．ただし，$F(x)$ は正値密度関数 $f(x)$ を持つ $\mathcal{R}$ 上の連続微分可能な確率分布関数；$h(x)$ は $\mathcal{R}_+$ 上の狭義単調増加な関数で，$\lim_{x\searrow 0} h(x) = -\infty, \lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$ をみたす．$\{x_{ij}\}(1 \le i \le N; 0 \le j \le n(i)+1)$ は観測点から成る集合で，$x_{i0} = -\infty < x_{i1} < \cdots < x_{in_i} < x_{in_i+1} = \infty$ をみたすものとする．$X_{i1},\cdots,X_{in_i}$ は未知の分布 $F(\alpha_0 h(x-\lambda_0)-\beta_0) \in \mathcal{F}$ を持つ母集団からの大きさ n_i の確率標本とする．各 $X_{ij}(1 \le i \le N; 1 \le j \le n_i)$ については $\{X_{ij} \in \mathcal{C}_{ij}\}$ という情報しか観測出来ないものとする．ここに $\mathcal{C}_{ij} \in \{[x_{ik}, x_{ik'}); 0 \le k < k' \le n(i)+1\}$ である．このとき，$\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_{ij}; 1 \le i \le N; 1 \le j \le n_i\}$ をプールされた区間データという．特に $n(1) = \cdots = n(N) = 1$ のときプールされた区間データを2値反応データという．このような状況の下で，我々は種々の推定法を導入し，対応する推定値の存在について議論したい．第2節では $N = 1, n(1) \ge 3, h(x) = \log x$ について考える．この節では中村 (1990) で得られた結果を簡単に述べる．第3節では，2値反応データが観測された場合について種々の推定法を考え，対応する推定値の存在のための判定法を与える．また，この判定法の効率を調べるために，最尤法，最小2乗法を考え，最尤推定値，最小2乗推定値の存在のための判定法の効率をシミュレーションにより計算する．

2.　区間データに基づく最尤推定値

この節では $N = 1, n(1) \ge 3, h(x) = \log x$ の場合について最尤法を考える．中村 (1990) は最尤解の存在のための判定法を用いて導いた．また，その結果はある意味で最良であることも証明した．境界確率解析法については第3節で詳しく述べるので，この節では中村 (1990) の結果を簡単に述べることにとどめる．$n = n_1$ とおく．$\mathcal{C}_{11},\cdots,\mathcal{C}_{1n}$ の有限な端点のうちで相異なるものを選び、それを大きさの順に並べたものを $x_1,\cdots,x_m$ とする．すなわち，$x_0 = -\infty < x_1 < \cdots < x_m < x_{m+1} = -\infty$．$n_{ij}(0 \le i < j \le m+1)$ は x_iと x_j とを端点に持つ $\mathcal{C}_{1k}, 1 \le k \le n$ の個数を表すも

のとする．便宜上、関数 $t(x,\theta)(\theta=(\alpha,\beta,\lambda)\in\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}\times[-\infty,\infty))$ を定義する．

$$t(x,\theta)=\begin{cases}-\infty, & -\infty\le x\le\lambda,\\ \alpha\log(x-\lambda)-\beta, & \lambda<x<\infty,\\ \infty & x=\infty.\end{cases}$$

区間データ $\mathcal{C}=\{\mathcal{C}_{11},\cdots,\mathcal{C}_{1n}\}$ に対する対数尤度 $\ell(\theta)$ は次式で定義される．

$$\ell(\theta)=\sum_{j=1}^{m+1}\sum_{i=0}^{j-1}n_{ij}\log\left(F(t(x_i,\theta))-F(t(x_i,\theta))\right)+const.$$

[定義]：$\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}\times\mathcal{R}$ に対する最尤推定値 $\hat{\theta}\in\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}\times\mathcal{R}$ は対数尤度 $\ell(\theta)$ を $\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}\times\mathcal{R}$ 上で最大にする点として定義される．
便宜上，次の記号を導入する．

$$n_{\bullet j}=\sum_{i=0}^{j-1}n_{ij},\quad 1\le j\le m+1\ ;$$

$$n_{i\bullet}=\sum_{j=i+1}^{m+1}n_{ij},\quad 0\le i\le m\ .$$

以上の準備の下で次の定理を得る．

定理２．１． $\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}\times\mathcal{R}$ に対する最尤推定値 $\hat{\theta}$ は次の条件 $(i)\sim(iii)$ が満たされれば存在する．

(i) $\sum_{j=1}^{k}n_{\bullet j}+\sum_{i=k+2}^{m}n_{i\bullet}\ne0,\quad 0\le k\le m-2.$

(ii) $\sum_{j=1}^{k}n_{\bullet j}+\sum_{k+2\le i<j\le m}n_{ij}\ne0,\quad 0\le k\le m-3.$

(iii) $\sum_{j=1}^{m-1}n_{\bullet j}=0$ または

$$\sum_{j=2}^{m}\sum_{i=1}^{j-1}n_{ij}\frac{x_j^2f(\tilde{\alpha}x_j-\tilde{\beta})-x_i^2f(\tilde{\alpha}x_i-\tilde{\beta})}{F(\tilde{\alpha}x_j-\tilde{\beta})-F(\tilde{\alpha}x_i-\tilde{\beta})}<$$

$$\sum_{i=1}^{m}n_{i\ m+1}\frac{x_i^2f(\tilde{\alpha}x_i-\tilde{\beta})}{1-F(\tilde{\alpha}x_i-\tilde{\beta})}-\sum_{j=1}^{m}n_{0j}\frac{x_j^2f(\tilde{\alpha}x_j-\tilde{\beta})}{F(\tilde{\alpha}x_j-\tilde{\beta})}.$$

ここに、

$$(\tilde{\alpha},\tilde{\beta}) = Arg \max_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}} \sum_{j=1}^{m+1}\sum_{i=0}^{j-1} n_{ij}\log(F(\alpha x_j-\beta)-F(\alpha x_i-\beta))$$

注意２．１．定理２．１における条件 $(i)\sim(ii)$ は $(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})$ の存在を保証する．

次に定理２．１で求めた判定法の効率を調べる．以下この節を通じて $F(x)$ は標準正規分布関数とする．そうすると

$$\mathcal{F} = \{F(\alpha h(x-\lambda)-\beta); (\alpha,\beta,\lambda)\in\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}\times\mathcal{R}\}$$

は 3 母数対数正規分布族となる．$\alpha=1, \beta=\lambda=0$ の対数正規乱数列から n の乱数を取り出す実験を１０００回繰り返す．以下において我々は次の場合を考える．

$m=5; n=10,\ 20,\ 30$;

$x_1=t,\ x_2=t+0.5,\ x_3=t+1,\ x_4=t+1.5,\ x_5=t+2$;

$t = 0.1(1\%点), 0.19(5\%点), 0.28(10\%点), 0.36(15\%点), 0.43(20\%点)$

結果は次表のようになった．各欄の数値は 1000 回中我々の判定法で最尤解が存在すると判定された割合を表わす．

	0.1	0.19	0.28	0.36	0.43
10	93.9%	88.4%	78.6%	69.0%	59.3%
20	100%	97.0%	92.2%	81.9%	67.5%
30	100%	100%	98.2%	94.5%	69.2%

この表から，我々の求めた判定法は最尤解が存在するかどうかを調べるのに有効であるといえる．

3. 2値反応データに基づく最小コントラスト推定値

3.1. 準備

第 3 節では $\mathcal{C}$が 2 値反応データである場合について考える．便宜上，$x_i = x_{i1} (1 \le i \le N)$ とおく． また，$x_1 < \cdots < x_N$ 及び $N \ge 3$ を仮定する．Θ を $\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}\times[-\infty,\infty)$ の部分集合とし，各 $\theta=(\alpha,\beta,\lambda)\in\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}\times[-\infty,\infty)$

に対し，$t(x,\theta)$ を次のように定義する．

$$t(x,\theta)=\begin{cases}\alpha\tilde{h}(x)-\beta, & \lambda=-\infty,\\ \alpha h(x-\lambda)-\beta, & \lambda\neq-\infty.\end{cases}$$

ここに $\tilde{h}(x)$ は $\mathcal{R}$ 上の狭義単調増加な関数で，$\lim_{x\to-\infty}\tilde{h}(x)=-\infty$ かつ $\lim_{x\to\infty}\tilde{h}(x)=\infty$ を満たす．真の母数を推定するために次の条件を満たす計量関数 $D(z,p)$: $[0,1]\times[0,1]\to(-\infty,\infty]$ を採用する．

(C.1) 各 $p\in[0,1]$ に対し，$D(z,p)$ は p の関数として $(0,1)$ 上で 2 回微分可能な実数値関数で，$-\infty\leq a_0(p)\equiv\lim_{z\searrow 0}\frac{dD(z,p)}{dz}<\infty$ かつ$-\infty<a_1(p)\equiv\lim_{p\nearrow 1}\frac{dD(z,p)}{dz}\leq\infty$ を満たす．

(C.2) 各 $p\in[0,1]$ に対し，$D(z,p)$ は z の関数として $[0,1]$ からコンパクト距離空間 $\bar{\mathcal{R}}$ 中への連続関数である．

コントラスト関数 $\ell:\Theta\to(-\infty,\infty]$ は次式で定義される．

$$\ell(\theta)=\sum_{i=1}^{N}\left(D(F(t(x_i,\theta)),n_{i1}/n_i)+D(1-F(t(x_i,\theta)),n_{i2}/n_i)\right).$$

ここに n_{i1} ，n_{i2} は i 番目の標本において，それぞれ $\{X_{ij}\in(-\infty,x_i)\}$ ，$\{X_{ij}\in[x_i,\infty)\}$ が観測される個数を表す．

[定義]　コントラスト関数 $\ell(\theta)$ を Θ 上で最小にする点 $\hat{\theta}\in\Theta$ を Θ に対する最小コントラスト推定値いう．

計量関数 $D(z,p)$ の例としては次がある．

例1．1．

(i) 最尤法：

$$D(z,p)=\begin{cases}-p\log z, & z\neq 0,\\ \infty, & p\neq 0\ and\ z=0,\\ 0, & p=0.\end{cases}$$

(ii) 最小 2 乗法： $D(z,p)=(z-p)^2$.

(iii) ヘリンガー距離： $D(z,p)=-\sqrt{zp}$ ．

(iv) 修正最小カイ 2 乗法：

$$D(z,p)=\begin{cases}n_i\frac{(z-p)^2}{p}, & p\neq 0,\\ 0, & p=0.\end{cases}$$

(v) カルバック・ライブラー 分離：

$$D(z,p)=\begin{cases} z\log(\frac{z}{p}), & p\neq 0 \ and \ z\neq 0,\\ 0, & p=0 \ or \ z=0.\end{cases}$$

次節において境界確率解析法を述べる．第３．３節においてに対する最小コントラスト推定値の存在のための判定法を，境界確率解析法をもちいて，導き出す．第４節において，求めた判定法の効率をシミュレーションによって検証する．

3.2. 境界確率解析法

境界確率解析法を述べる前に若干の記号を導入する．N 次元ユークリッド空間の部分集合 $\mathcal{S},\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2$ に対し，$\bar{\mathcal{S}}$ は $\mathcal{S}$ の閉包，$\mathcal{S}_1-\mathcal{S}_2$ は $\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{S}_2$ の差集合を表す．$\mathcal{Z}=\{(z_1,\ldots,z_N)\in\mathcal{R}^N;0\leq z_1\leq\ldots\leq z_N\leq 1\}$ とし，$\mathbf{F}:\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}\times[-\infty,\infty)\to\mathcal{Z}$ を次式で定義する．

$$\mathbf{F}(\theta)=(F(t(x_1,\theta)),\ldots,F(t(x_N,\theta))).$$

集合 $\partial\mathbf{F}(\Theta)=\overline{\mathbf{F}(\Theta)}-\mathbf{F}(\Theta)$ は 写像 $\mathbf{F}$ に関する分布族 $\mathcal{F}(\Theta)\equiv\{F(t(x,\theta));\theta\in\Theta\}$ の境界確率集合と呼ばれる．各 $\mathbf{z}=(z_1,\ldots,z_N)\in\mathcal{Z}$ に対し，関数 $L(\mathbf{z})$ を次式で定義する．

$$L(\mathbf{z})=\sum_{i=1}^{N}(D(z_i,n_{i1}/n_i)+D(1-z_i,n_{i2}/n_i)),$$

$L(\mathbf{F}(\theta))=\ell(\theta)$ であることに注意しよう．

次の定理が我々の解析方法の基礎となる．

定理３．１． Θ を $\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}\times[-\infty,\infty)$ の部分集合とし，$M_b=inf\{L(\mathbf{z});\mathbf{z}\in\partial\mathbf{F}(\Theta)\}$ とする．ただし，$\partial\mathbf{F}(\Theta)=\emptyset$(空集合) のときは $M_b=\infty$ とする．このとき，Θ に対する最小コントラスト推定値が存在するための必要・十分条件は $L(\mathbf{z}^*)\leq M_b$ となる $\mathbf{z}^*\in\mathbf{F}(\Theta)$ が存在することである．

本論の主目的は $\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}\times\mathcal{R}$ に対する最小コントラスト推定値の存在のための判定法を導くことであるから $\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}\times\mathcal{R}$ の境界確率集合の構造を明確にしなければならない．そのために次の記号を導入する．

$$\mathbf{1} = (\overbrace{1, \ldots, 1}^{N}),$$

$$\mathbf{a}_i(z) = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{i-1}, z, \overbrace{1, \ldots, 1}^{N-i}), \ 1 \le i \le N; 0 \le z \le 1$$

$$\mathbf{b}_i(z, z') = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{i-1}, z, \overbrace{z', \ldots, z'}^{N-i}), 1 \le i \le N-1; 0 \le z \le z' \le 1.$$

次の定理は 中村 (1984) で得られている.

定理３．２． 境界確率集合 $\partial\mathbf{F}(\mathcal{R}_+ \times \mathcal{R} \times \{-\infty\})$ は次のように表現される.

$$\partial\mathbf{F}(\mathcal{R}_+ \times \mathcal{R} \times \{-\infty\}) = \{z\mathbf{1}; 0 < z < 1\} \ \cup \ (\cup_{i=1}^{N}\{\mathbf{a}_i(z); 0 \le z \le 1\}).$$

次に $\mathcal{R}_+ \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ の境界確率集合の構造を明確にしよう. そのために次の条件 **(A.1)**–**(A.2)** を満たす $\mathcal{R}_+$上の関数 $a(s)$, $\mathcal{R}_+$上の正値関数 $b(s)$, $c(s) = o(1)$ $(s \to 0+)$ となる $\mathcal{R}_+$ 上の狭義単調増加かつ微分可能な関数 $c(s)$, $\mathcal{R}$ 上の関数 $w(s)$ が存在を仮定する.

(A.1) 十分小さな正数 $s > 0$ に対し, $h'(s) > 0$ かつ $h(s) = o(h'(s))$ $(s \to 0+)$.

(A.2) 次の条件を **(i)** - **(ii)** を満たす $\mathcal{R}$ 上の正値関数 $d(x)$ と $\{\{x\} \times (0, d(x)); x \in \mathcal{R}\}$ 上の関数 $R(x, s)$ が存在する.

(i) $h(x + 1/s) = a(s) + b(s)(\tilde{h}(x) + w(x)c(s) + R(x, s)),$

$$x \in \mathcal{R}; s \in (0, d(x)).$$

(ii) 任意に固定した $x \in \mathcal{R}$ にたいし, $R(x, s)$ は $(0, d(x))$ 上で微分可能で, $R(x, s) = o(1), R'(x, s) = o(c'(s))$ $(s \to 0+)$ が成立する.

例２．１．

(i) $h(x) = \log x$ の場合を考える. $h(x + \frac{1}{s})$ をテイラー展開することにより,
$a(s) = -\log s;\ b(s) = s;\ c(s) = s; d(x) = \frac{1}{|x|};\ \tilde{h}(x) = x;$
$w(x) = -\frac{x^2}{2};\ R(x, s) = \frac{x^3}{3}s^2 + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} s^{n-1} + \cdots.$

(ii) $h(x) = x - 1/x$ の場合を考える. $h(x + \frac{1}{s})$ をテイラー展開することにより,
$a(s) = \frac{1}{s} - s;\ b(s) = 1;\ c(s) = s^2; d(x) = \frac{1}{|x|};\ \tilde{h}(x) = x;$
$w(x) = x;\ R(x, s) = -x^2 s^3 + \cdots + (-1)^{n+1} x^n s^{n+1} + \cdots.$

次の定理 (中村・李 **(1989)**) が得られる.

定理3　3． 境界確率集合 $\partial\mathbf{F}(\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}\times\mathcal{R})$ は次のように表現される.

$$\begin{aligned}\partial\mathbf{F}(\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}\times\mathcal{R}) &= \{z\mathbf{1};0<z<1\}\ \cup\ (\cup_{i=1}^{N-1}\{\mathbf{a}_i(z);0\le z\le 1\})\\ &\quad\cup(\cup_{i=1}^{N-2}\{\mathbf{b}_i(z,z');0\le z<z'<1\})\\ &\quad\cup\mathbf{F}(\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}\times\{-\infty\}).\end{aligned}$$

注意3．1． 中村 (1990) は $D(z,p)=-p\log z, h(x)=\log x$ の場合に対して定理 3.3 を証明している.

3.3. 判定法

この節では $\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}\times\{-\infty\}$ に対する最小コントラスト推定値と $\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}\times\mathcal{R}$ に対する最小コントラスト推定値の存在のための判定法を与える．その前に若干の記号を導入する．$p_i=n_{i1}/n_i$，$q_i=1-p_i$, $1\le i\le N$ とおく． $L(\mathbf{z})$ の定義から

$$\begin{aligned}L(z\mathbf{1}) &= \sum_{i=1}^{N}(D(z,p_i)+D(1-z,q_i)),\\ L(\mathbf{a}_i(z)) &= \sum_{j<i}(D(0,p_j)+D(1,q_j))+D(z,p_i)+D(1-z,q_i)\\ &\quad+\sum_{j>i}(D(1,p_j)+D(0,q_j)),\quad 1\le i\le N.\end{aligned}$$

$\hat{z}_i,\hat{z}_0\in[0,1]$ はそれぞれ $L(\mathbf{a}_i(\hat{z}_i))=\min_{0\le z\le 1}L(\mathbf{a}_i(z))$， $L(\hat{z}_0\mathbf{1})=\min_{0\le z\le 1}L(z\mathbf{1})$ を満たすものとする $(1\le i\le N)$．

次の定理は $\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}\times\{-\infty\}$ に対する最小コントラスト推定値のための判定法を与える (中村・李 (1989))．

定理3．4． 次の3つの条件が満たされるならば $\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}\times\{-\infty\}$ に対する最小コントラスト推定値が存在する.

$$L(z_0\mathbf{1})=\min_{1\le i\le N}L(\mathbf{a}_i(\hat{z}_i)). \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{N}a_1(p_i)<\sum_{i=1}^{N}b_1(q_i)\ and\ \sum_{i=1}^{N}a_1(q_i)<\sum_{i=1}^{N}b_1(p_i). \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{N}D'(\hat{z}_0,p_i)\tilde{h}(x_i)<\sum_{i=1}^{N}D'(1-\hat{z}_0,q_i)\tilde{h}(x_i). \tag{3}$$

例3．1． $\bar{p}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}p_i, \bar{q}=1-\bar{p}$ とおく.

(i)（最尤法） 次の条件が満たされれば $\mathcal{R}_+ \times \mathcal{R} \times \{-\infty\}$ に対する最尤推定値が存在する．
各 $k(1 \le k \le N)$ ，に対し，

$$\sum_{i=1}^{k-1} p_i \ne 0 \text{ または } \sum_{i=k+1}^{N} p_i \ne N-k$$

または

$$0 < p_k < 1 \text{ かつ } p_k \log p_k + q_k \log q_k \le N(\bar{p} \log \bar{p} + \bar{q} \log \bar{q});$$

$$0 < \bar{p} < 1;$$

$$\bar{p} \sum_{i=1}^{N} q_i \tilde{h}(x_i) < \bar{q} \sum_{i=1}^{N} p_i \tilde{h}(x_i).$$

(ii)（最小２乗法） 次の条件が満たされれば $\mathcal{R}_+ \times \mathcal{R} \times \{-\infty\}$ に対する最小２乗推定値が存在する．

$$2 \sum_{i>k} p_i \le (N-k) + N\bar{p}^2 + p_k^2, \ 1 \le k \le N;$$

$$0 < \bar{p} < 1;$$

$$\bar{p} \sum_{i=1}^{N} \tilde{h}(x_i) < \sum_{i=1}^{N} p_i \tilde{h}(x_i).$$

(iii)（ヘリンガー距離） 次の条件が満たされれば $\mathcal{R}_+ \times \mathcal{R} \times \{-\infty\}$ に対するヘリンガー距離推定値が存在する．

$$(1 + \sum_{i<k} \sqrt{q_i} + \sum_{i>k} \sqrt{p_i})^2 \le N^2(\bar{p}^2 + (1-\bar{p})^2), \quad 1 \le k \le N;$$

$$0 < \bar{p} < 1;$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sqrt{p_i} \sum_{i=1}^{N} \sqrt{q_i} \tilde{h}(x_i) < \sum_{i=1}^{N} \sqrt{q_i} \sum_{i=1}^{N} \sqrt{p_i} \tilde{h}(x_i).$$

$L(\mathrm{z})$ の定義より，

$$L(\mathrm{b}_i(u,v)) = \sum_{j<i-1} (D(0,p_j) + D(1,q_j)) + D(u,p_i) + D(1-u,q_i)$$

$$+\sum_{j>i+1}(D(v,p_j)+D(1-v,q_j)),\ 1\le i\le N-2.$$

$(\hat{u}_i,\hat{v}_i)\in[0,1]\times[0,1](1\le i\le N)$ は次の最小化問題の最適解とする．

$$L(\mathrm{b}_i(\hat{u}_i,\hat{v}_i))=\min_{0\le u\le v\le 1}L(\mathrm{b}_i(u,v)).$$

また $L(\mathrm{b}_k(\hat{u}_k,\hat{v}_k))=\min_{1\le i\le N}L(\mathrm{b}_i(\hat{u}_i,\hat{v}_i))$ となるような $k(1\le k\le N)$ を選ぶ．

次の定理は $\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}\times\mathcal{R}$ に対する最小コントラスト推定値のための判定法を与える（中村・李 (1989)）．

定理３．５． 条件 (1) - (3) を仮定する．また $\ell(\hat{\alpha},\hat{\beta},-\infty)=\min_{\theta\in\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}\times\{-\infty\}}\ell(\alpha,\beta,-\infty)$．とする．そうすると次の条件 (i) - (iv) のいづれか一つが満たされれば $\mathcal{R}_+\times\mathcal{R}\times\mathcal{R}$ に対する最小コントラスト推定値が存在する．

(i) $\ell(\hat{\alpha},\hat{\beta},-\infty)\le L(\mathrm{b}_k(\hat{u}_k,\hat{v}_k))$ かつ

$$\sum_{i=1}^{N}w(x_i)f(\hat{\alpha}\tilde{h}(x_i)-\hat{\beta})D'(F(\hat{\alpha}\tilde{h}(x_i)-\hat{\beta}),p_i)$$

$$<\sum_{i=1}^{N}w(x_i)f(\hat{\alpha}\tilde{h}(x_i)-\hat{\beta})D'(1-F(\hat{\alpha}\tilde{h}(x_i)-\hat{\beta}),q_i).$$

(ii) $L(\mathrm{b}_k(\hat{u}_k,\hat{v}_k))\le\ell(\hat{\alpha},\hat{\beta},-\infty),0<\hat{u}_k<\hat{v}_k<1$ かつ

$$\sum_{i\ge k+2}h(x_i-x_k)D'(\hat{v}_k,p_i)<\sum_{i\ge k+2}h(x_i-x_k)D'(1-\hat{v}_k,q_i).$$

(iii) $L(\mathrm{b}_k(\hat{u}_k,\hat{v}_k))\le\ell(\hat{\alpha},\hat{\beta},-\infty),\hat{u}_k=0<\hat{v}_k<1$ かつ，ある $x\in(x_k,x_{k+1})$ に対して

$$\sum_{i\ge k+2}h(x_i-x)D'(\hat{v}_k,p_i)<\sum_{i\ge k+2}h(x_i-x)D'(1-\hat{v}_k,q_i).$$

(iv) $L(\mathrm{b}_k(\hat{u}_k,\hat{v}_k))\le\ell(\hat{\alpha},\hat{\beta},-\infty),0<\hat{u}_k=\hat{v}_k<1$ かつ，ある $x\in(x_{k-1},x_k)$ に対して

$$\sum_{i\ge k+1}h(x_i-x)D'(\hat{v}_k,p_i)<\sum_{i\ge k+1}h(x_i-x)D'(1-\hat{v}_k,q_i).$$

注意３．２． 上の定理で求めた判定法は最適解 $\hat{z}_0,\hat{z}_i(1\le i\le N),\hat{\alpha},\hat{\beta},(\hat{u}_i,\hat{v}_i)(1\le$

$i \le N-2$) を含んでいる．一般にこれらの最適解は $x_i's, p_i's, q_i's$ で明確な形で表すことはできない．従って，この判定法を有効に利用するには逐次近似法が必要となってくる．これに関する数値例は次節で述べることにする．

3.4. 判定法の効率

この節では最尤法と最小２乗法の場合について前節で求めた判定法の効率をシミュレーションにより検証する． 分布 $F(x)$ としてはロジスティック分布

$$F(x) = \frac{1}{1+\exp(-x)}$$

および 正規分布

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-x^2/2)dx$$

を採用する． $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n$ とし，変換 $h(x)$ として $h(x) = \log x$ を採用する．そうすると

$$\tilde{h}(x) = x; \qquad w(x) = -\frac{x^2}{2}$$

$$t(x,\theta) = \begin{cases} \alpha x - \beta, & \lambda = -\infty, \\ \alpha \log(x-\lambda) - \beta, & \lambda \ne -\infty, \end{cases}$$

$$\theta = (\alpha, \beta, \lambda) \in \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R} \times [-\infty, \infty)$$

となることに注意しよう．以下において我々は次の場合を考える．
標本の個数 (N)： $N=4$
標本の大きさ $n =$ 10, 30, 50, 100
真の母数： $\alpha = 1, \beta = 0, \lambda = 0$
繰り返し回数： 1000 回
観測点 x_i としては次の３つの場合を考える．

	x_1	x_2	x_3	x_4
$CaseA$	10%点	30%点	50%点	70%点
$CaseB$	20%点	40%点	60%点	80%点
$CaseC$	30%点	50%点	70%点	90%点

計算結果を表にまとめると次のようになる．ただし，各表におけるパーセント数は１０００回の繰り返し実験において，我々の判定法（定理 **3.5**）で各推定法に対応する推定値が存在すると判定された割合を示す．

最尤法：

対数ロジスティック分布の場合

	10	30	50	100
$CaseA$	71.4%	94.4%	98.8%	99.9%
$CaseB$	79.2%	95.7%	98.7%	99.8%
$CaseC$	71.4%	94.4%	99.7%	99.9%

対数正規分布の場合

	10	30	50	100
$CaseA$	74.6%	91.2%	95.6%	98.8%
$CaseB$	70.8%	86.5%	92.4%	98.1%
$CaseC$	60.0%	88.3%	94.6%	98.7%

最小２乗法：

対数ロジスティック分布の場合

	10	30	50	100
$CaseA$	66.9%	92.2%	97.4%	99.6%
$CaseB$	68.8%	92.8%	97.7%	99.5%
$CaseC$	63.0%	88.0%	92.5%	96.7%

対数正規分布の場合

	10	30	50	100
$CaseA$	64.8%	89.1%	94.9%	99.1%
$CaseB$	67.7%	88.9%	95.9%	99.3%
$CaseC$	70.5%	88.7%	96.0%	98.6%

これらの表から，我々の求めた判定法は最小コントラスト推定値が存在するかどうかを調べるのに有効であるといえる．

参考文献

Nakamura,T.(1984). Existence theorems of a maximum likelihood estimate from a generalized censored data sample, Ann.Inst.Statist. Math.36,375-393.

Nakamura,T. and Lee,C-S.(1989). On the existence of minimum contrast estimates for binomial-response models, Technical Report Series of Okayama Statisticians Group, No.37, Okayama University,Japan.

Nakamura,T.(1990). Existence of maximum likelihood estimates for interval-censored data from some three-parameter models with shifted origin, to appear in J.R.Statist.Soc.Ser. B(52),No.3.